

Rattrapage d'Algebre 3

Durée: 01H30

Exercice 1

Soient E, F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F .

- ① Montrer que l'image directe $f(H)$ d'un sous-espace vectoriel H de E est un sous-espace vectoriel de F .
- ② En déduire que l'image de f , $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .
- ③ Montrer que l'image réciproque $f^{-1}(G)$ d'un sous-espace vectoriel G de F est un sous-espace vectoriel de E .
- ④ En déduire que le noyau de f , $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 2 On considère l'application linéaire: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x+y, 3x-z)$

- ① Donner une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
- ② L'application f est-elle injective, surjective? Justifier la réponse
- ③ Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{R}^2 .
- ④ Utiliser les questions précédentes, pour en déduire le rang et l'inversibilité de la matrice A .